



Spelteori och strategiskt tänkande

Game Theory and Strategic Thinking

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Daniel Abrahamsson

Nils Burreau

Marcus Guthe

Noah Imbratt

Martin Välimäki

Max Yousufi Rahimi

Spelteori och strategiskt tänkande

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers

Noah Imbratt Max Yousufi Rahimi

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Daniel Abrahamsson Nils Burreau Marcus Guthe

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Globala system vid Chalmers

Martin Välimäki

Handledare: Eusebio Gardella Matematiska Vetenskaper

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2026

Förord

I detta förord ges en kort bidragsrapport av kandidatarbetet.

Eventuella slarvfel, notationsfel eller stavfel tar hela gruppen ansvar över då alla gruppmedlemmar korrekturläst rapporten. En loggbok över gruppen arbete har även förts.

I helhet har samtliga gruppmedlemmar deltagit i diskussioner kring teori, upplägg, slutsatser, informationshämtning och resultat under hela rapportens skrivande. Nedan kommer en mer detaljerad redogörelse av arbetsfördelningen.

Daniel Abrahamsson: Har tillsammans med Noah Imbratt haft ansvar för Kapitel 4. Enkla beslutsprocesser. Daniel har skrivit mest på 4.2 och 4.3. Daniel har också haft stort ansvar för matematiken bakom beviset av Nash. I övrigt har han korrekturläst hela arbetet och hjälpt till där det har behövts.

Noah Imbratt: Skrivit inledning till Kapitel 3, inledning till Kapitel 4, 4.1, Exempel 4.3, Sats med bevis 4.12. 4.4 optimala strategier. Definition 5.1, Definition 5.2. Sats 5.6. I övrigt; korrekturläst och korrigerat andra delar av texten.

Martin Välimäki: Har skrivit Kapitel 7.3, Sammandrag/ Abstract och exempel 6.2. Har för övrigt korrekturläst hela arbetet och hjälpt till på skrivandet av Nashbevisets första skede.

Marcus Guthe: Har skrivit Kapitel 7 förutom 7.3, Inledning, Exempel 3.6, Appendix del C och D, överblicksintroduktionen av beviset av Sats 6.1. Även sökt och hittat källorna som används i Kapitel 7. I övrigt; korrekturläst, korrigerat och diskuterat fel i andra delar av texten.

Max Yousufi Rahimi: Ansvarat för avsnitt 2 om grundläggande spelteori och lagt fram initiala strukturen och kronologin i beviset baserat på Nashs artikel och därutöver skrivit delar av den. Har även jobbat med att göra texten mer sammanhängande genom att lägga till rimliga övergångar mellan avsnitten och referera till definitioner där det varit lämpligt. Har även jobbat med att införa vissa koncept som behövdes inför Nashbeviset som att lägga till definitioner 4.5, 4.6, 6.3 och somliga stycken i början av avsnitt 6. Andra bidrag har inkluderat korrekturläsning vilket följts av korrektion av matematiska beteckningar, sökning av källor samt omformulering av förklaringar för att öka läsbarheten i texten. Det sistnämnda har, som tidigare uttryckt, gjorts genom pågående konversation med de andra i gruppen. Slutligen har Max ansvarat för källor som förekommer i introduktionsavsnittet.

Nils Bureau: Har tillsammans med Max Yousufi Rahimi haft ansvar för Kapitel 2 och 3 och skrivit med huvudfokus Kapitel 3. Utöver detta har Nils fokuserat på matematiken i beviset av Existenssatsen samt illustrativ tolkning. Nils har vidare arbetat med matematisk samstämmighet och kontinuitet i rapportens samtliga delar förutom Kapitel 7. Vidare har Nils arbetat kontinuerligt korrekturläsning och korrigerat och bearbetat text så som kapitelövergång.

Sammandrag

Nashs bevis för existensen av jämviktpunkter inom spelteori har lagt grunden för ett flertal olika tillämpningar, inklusive analys av förhandlingsteori, ekonomiska modeller och internationella relationer. Givet ett antal spelare med begränsade mängder strategier visar Nashs teori i huvudsak att en jämviktpunkt alltid kan hittas där en förändring av strategi alltid skulle ha lett till en försämring av avkastning, eftersom de val som finns tillgängliga för varje spelare bildar ett kompakt och konvext strategirum, vilket möjliggör användningen av Brouwers fixpunktssats.

Rapporten börjar med att definiera de byggstenar som krävs för att bevisa existensen av en Nashjämvikt. Detta inkluderar en handling i ett enkelt beslutsproblem. Därefter definieras en strategiprofil, vilket är en fullständig specifikation av vad varje spelare gör vid en given tidpunkt i ett spel med flera spelare. För att kunna beskriva alla handlingar i relation till andra spelares handlingar introduceras en funktion som avbildar alla handlingar till reella tal. Denna funktion kan till exempel avbilda en handling som utförs av ett företag på en viss marknad till en given avkastning.

Därefter definieras rationalitet, optimala strategier och beslutsprocesser över tid. Vidare utvecklas detta till att omfatta rena strategier och blandade strategier, där en ren strategi innebär att en handling väljs vid varje beslutspunkt utan randomisering, medan en blandad strategi definieras som en sannolikhetsfördelning över mängden rena strategier. Denna del avslutas med definitionen av en optimal ren strategi.

Avslutningsvis introduceras och bevisas Nashjämvikt i icke-kooperativa spel, vilket leder fram till en sats som säger att det i varje ändligt icke-kooperativt spel existerar minst en Nashjämviktpunkt. Exempel ges på tillämpningar av olika modeller där Nashjämvikt kan användas för olika strategier under olika initiala förutsättningar.

Abstract

Nash's proof of the existence of equilibrium points in game theory has laid the foundations for a number of different applications, including the analysis of negotiation theory, economic models and international relations. Given a number of players with limited sets of strategies, Nash's theory essentially shows that an equilibrium point can always be found where a change in strategy would always have resulted in a deterioration of payoff, as the choices available to each player form a compact and convex strategy space, which allows for the application of Brouwer's fixed-point theorem.

The report begins by defining the building blocks required for the proof of Nash equilibrium. This includes an action in a simple decision problem. This is followed up by defining a strategy profile which is a complete specification of what each player does at the current point in a multiperson game. To be able to map all actions in the context of other players actions, a function is introduced that maps all actions to real numbers. This function could for example map an action taken by a company in any given market and mapping it to a given return.

This is followed up by defining rationality, optimal strategies and decision processes over time. Further it is expanded to include pure strategies and mixed strategies, a pure strategy being a strategy where an action is taken at each decision over time without randomization and a mixed strategy being a strategy defined as a probability distribution over the set of pure strategies. As the closing part of this section the definition of an optimal pure strategy is introduced.

Finally, Nash equilibrium in non-cooperative games is introduced and proven resulting in a theorem that in every finite non-cooperative game has at least one Nash equilibrium. Examples are given of applications of various models where Nash equilibrium can be applied to different strategies under different initial conditions.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Grundläggande spelteori	2
2.1	Val och handlingar	2
3	Rationalitet	3
3.1	Förutsägbara utfall	3
3.2	Lotterier	3
3.3	Optimala beteenden	5
4	Enkla beslutsprocesser	6
4.1	Beslutsprocesser över tid	7
4.2	Strategier	7
4.3	Randomisering av strategier	8
4.4	Optimala strategier	10
5	Existenssatsen om Nashjämvikt	11
6	Bevis av Existenssatsen om Nashjämvikt	12
6.1	Exempel	14
7	Applikationer av Nashjämvikt för kontinuerliga system	14
7.1	Bertrandmodellen	15
7.2	Cournotmodellen	15
7.3	Stackelbergmodellen	16
7.4	Applikation av duopolmodellerna	17
8	AI användning	ii
A	Appendix	ii
B	Brouwers fixpunktssats för specialfallet $n = 1$	ii
C	Kartesisk produkt av konvexa mängder är konvex	ii
D	Förtydligande av bevis av Nash	ii
D.1	Varför gäller beviset endast för en begränsad mängd strategier?	ii
D.2	Varför är Σ kompakt och konvex?	ii

1 Inledning

Betrakta två företag som simultant ska prissätta en identisk produkt. Varje företags vinst beror inte enbart på det egna prisvalet utan beror i lika hög grad på motpartens beslut, ett beslut som fattas utan kännedom om det andra företags val. Frågan om hur en rationell aktör bör agera i en sådan situation är inte trivial.

Situationer av detta slag där utfallet för varje aktör beror på samtliga inblandades beslut är både vanliga och viktiga. Dessa situationer dyker upp inom ekonomi, biologi, statsvetenskap och datavetenskap och låter sig inte modelleras med klassisk optimeringsteori där en ensam beslutsfattare maximerar en funktion av sina egna variabler. Spelteori är då det matematiska ramverket för strategiska interaktioner mellan flera rationella aktörer och hanterar situationer där alla aktörers beslut påverkar varandra.

Spelteori formaliserades av John von Neumann och Oskar Morgenstern 1944 [1] då den dåvarande ekonomiska teorin var otillräcklig för att matematiskt modellera även många enkla situationer inom ekonomi. Vidare ansåg von Neumann och Morgenstern att matematikens misslyckade applikation på ekonomisk teori berodde till stor del på imprecisa frågeställningar och imprecisa definitioner av ekonomiska koncept. De standardiserade begrepp såsom nollsummespel, simpla spel och nyttofunktion vilka tidigare inte haft en precis definition. Deras analys av n -personsspel antog dock att spelare kan kommunicera och bilda koalitioner. Nash [2] introducerade istället en teori för icke-kooperativa spel, där varje spelare agerar självständigt utan samordning, och visade att jämviktspunkter alltid existerar i dessa fall. Dessa jämviktspunkter kallas för Nashjämvikt och beskriver vad rationella aktörer förväntas göra i dessa typer av spel. Vidare kan man förstå en Nashjämvikt som ett tillstånd där ingen aktör tjänar på att enskilt byta strategi. En viktig distinktion är att en Nashjämvikt inte nödvändigtvis är det beslut som är bäst för alla parter, utan garanterar endast att ingen aktör ensidigt kan förbättra sitt utfall. Detta illustreras väl av *Fångarnas dilemma*: två misstänkta förhårs separerat och måste simultant välja att antingen tåga eller vittna mot den andre. Om båda tiger får båda ett lindrigt straff. Om en vittnar medan den andre tiger går den som vittnar fri medan den andre får ett hårt straff. Om båda vittnar får båda ett måttligt straff. Eftersom det alltid är individuellt rationellt att vittna oavsett vad motparten gör, är den enda Nashjämvikten att båda vittnar, trots att båda hade fått det bättre om båda tågade. Detta kan ses i Tabell 1.

	Tåga	Vittna
Tåga	(1, 1)	(10, 0)
Vittna	(0, 10)	(5, 5)

Tabell 1: Strafftabellen för fångarnas dilemma där värdena representerar antal år i fängelse. Nashjämvikten (Vittna, Vittna) är markerad i nedre högra hörnet.

Insikterna om vad rationella aktörer gör i frånvaro av kommunikation har fått betydande genomslag inom ekonomi, där Nashjämvikt används för att modellera bland annat priskonkurrens [3],[4], auktioner [5] och förhandlingar [6]. Begreppet har även funnit vida tillämpningar inom exempelvis biologi för att modellera evolutionärt stabila beteenden [7], [8], i frågan om resursallokering [9], inom datavetenskap för att analysera nätverksrouting [10], och därav även inom samhällsplanering för att förstå trafikflöden.

Trots denna bredd är det endast några av de ekonomiska tillämpningarna som kommer att diskuteras i rapportens senare del. Rapportens huvudsakliga syfte är att ge en introduktion till spelteori genom satser, bevis och exempel på spelteorins grunder. Vidare kommer dessa verktyg användas för att bevisa Nash jämviktssats med hjälp av Brouwers fixpunktssats. Rapporten går sedan vidare till att förklara och visa applikationerna av Nashjämvikt för kontinuerliga system, detta innefattar Bertrandmodellen, Cournotmodellen och Stackelbergmodellen. Dessa modeller ger en inblick i olika slags marknader där företag konkurrerar mot varandra, modellerna syftar på att förklara vart Nashjämvikter uppstår utifrån när företag väljer sin prissättning eller kvantitet producerad.

2 Grundläggande spelteori

Inom spelteori behandlas *spel*, som i den här rapporten syftar till en situation där ett ändligt antal spelare vardera väljer en *strategi* för att maximera sin *avkastningsfunktion*. De sistnämnda två begreppen är viktiga begrepp som definieras rigoröst i underavsnitt 4.2. *Spelare* hänvisar till de aktörer som väljer bland sina möjliga *handlingar*, i syftet att förbättra sina respektive avkastningar.

2.1 Val och handlingar

Under det ofta orealistiska antagandet att en handling alltid leder till dess förutsatta avkastning kan följande definitioner presenteras. En handling formuleras som spelarens beteende i ett enkelbeslutsproblem, alltså ett element $a_k \in \mathbf{A}_i$ och definieras enligt nedan.

Definition 2.1. *Ett val i ett enkelbeslutsproblem kallas en handling. Mängden av alla alternativa handlingar tillgängliga för spelare i betecknas $\mathbf{A}_i$ och kan vara en diskret mängd till exempel $\{a_1, a_2, \dots\}$ eller en kontinuerlig mängd, till exempel $[0, 1]$.*

Antag att vi har en ändlig mängd spelare $\mathbf{N} = \{1, \dots, n\}$, för varje spelare $i \in \mathbf{N}$ betecknar $\mathbf{A}_i$ mängden av möjliga handlingar för spelare i . Detta är alltså en mängd som innehåller alla möjliga handlingar för spelaren.

För att analysera vilka handlingar som är fördelaktiga för olika spelare krävs en matematisk beskrivning av hur spelarna värderar olika utfall. Detta görs med hjälp av avkastningsfunktioner som tilldelar varje handling ett reellt värde för respektive spelare.

Definition 2.2. *En avkastningsfunktion för spelare i definieras enligt*

$$\pi_i : \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbb{R},$$

som till varje handling $a_k \in \mathbf{A}_i$, där $\mathbf{A}_i$ är spelarens handlingsmängd, tilldelar ett reellt tal för vardera a_k , vilket betecknas $\pi_i(a)$, dessa representerar spelarens värdering av utfallet givet samtliga spelares handlingar.

Några exempel på avkastning, som kan vara av intresse i appliceringen av spelteorin är till exempel mängden pengar eller materiella ägodelar. I djurriket kan man betrakta antalet avkomma eller mängden mat som ett djur samlar inför vintern. Det blir då betydelsefullt att kunna ta reda på vilken handling som resulterar i de bästa utfallen; mest pengar, mat eller störst antal avkommor. Alltså för att svara på frågan om vilken handling som spelaren eller aktören bör välja givet att de andras val hålls fasta, måste värdet som maximerar funktionen bestämmas, formellt *argmax*, definierat enligt

$$x^* \in \arg \max_{x \in X} f(x),$$

detta är ekvivalent med

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x).$$

Denna är en mängd som kan innehålla flera värden och alltså är en korrespondens mellan maximivärdet och dess motsvarande argument. Till exempel kan den optimala handlingen skrivas $a^* \in \arg \max_{a \in \mathbf{A}_i} \pi_i(a)$. Detta är ekvivalent med

$$\pi_i(a^*) \geq \pi_i(a_k),$$

som gäller för alla $a_k \in \mathbf{A}_i$.

Nästa steg blir då att precisera vilka antaganden som krävs för att en sådan maximering faktiskt ska beskriva ett meningsfullt och konsekvent beslutsfattande. Det leder oss till frågan om *rationalitet*, det vill säga hur preferenser bör vara strukturerade, hur de kan relateras till handlingar samt under vilka villkor preferenserna kan representeras av en belönings- eller nyttokonstruktion som gör modellen förutsägbar.

3 Rationalitet

I spelteori modelleras aktörer som rationella beslutsfattare vilka antas fatta beslut utifrån egna preferenser och tillgänglig information. För att kunna analysera strategiska situationer krävs därför en matematisk beskrivning av hur enskilda spelare jämför olika utfall och hur dessa preferenser påverkar valet av handling. Grundläggande antaganden introduceras som används för att beskriva rationellt beteende. Först behandlas preferenser mellan säkra utfall och hur dessa kan representeras med *nyttofunktioner*. Därefter utvidgas modellen till situationer där utfallen är osäkra och representeras genom *lotterier* och sannolikhetsfördelningar. Slutligen introduceras *optimala beteenden* och hur rationella aktörer väljer handlingar som maximerar förväntad nytta.

3.1 Förutsägbara utfall

Införandet av avkastningsfunktionen π_i för spelare i , baserat på en handling a möjliggör modellering av en individs förhållningssätt och preferensordning i förhållande till en handling. Denna formulering presenterar ett antal aspekter som vi ska granska närmre för att beskriva rationalitet i spelteoretisk kontext. För det första är det viktigt att understryka ordningsföljden i mening. Vi kvantifierar ett redan existerande preferenssystem snarare än att låta avkastningen π_i vara orsaken till individens preferens. Vi tillåter olika individer att ha åtskilda preferenssystem såvida de är internt sammanhängande och konsekventa. Vidare önskar vi att en individ agerar i enlighet med sina preferenser. För att ytterligare efterlikna vår modell med orsaksbaserad verkan bör vi tillåta att en individ lika gärna kan fokusera och ordna sitt preferenssystem utefter resultat. Här antas att det inte råder osäkerhet i beslutssituationen, det vill säga att spelaren vet exakt vilket utfall varje handling leder till. Låt Ω beteckna mängden av möjliga utfall. Om en individ föredrar utfallet ω_1 över ω_2 *strikt*, alternativt *svagt*, betecknas detta $\omega_1 \succ \omega_2$ respektive $\omega_1 \succeq \omega_2$ medan likgiltighet inför de två utfallen betecknas $\omega_1 \sim \omega_2$.

Definition 3.1. En aktör anses vara rationell under visshet om dennes preferens mellan olika utfall uppfyller för alla $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ att

1. $\omega_1 \succeq \omega_2$ eller $\omega_2 \succeq \omega_1$
2. Om $\omega_1 \succeq \omega_2$ och $\omega_2 \succeq \omega_3$ så gäller det att $\omega_1 \succeq \omega_3$.

De ovanstående kraven refereras till som *fullständighet* respektive *transitivitet* och säkerställer att aktören kan ta ställning till samtliga parvis jämförda möjliga utfall efter preferens på ett sammanhängande sätt. Det bör noteras att vi möjliggjort för en hierarkisk ordning vilket inte är en kvantifiering av preferens. Vi kan inte säga något om till vilken grad aktören önskar ett utfall, endast ordningsförhållandet. Vi vill, likt avkastningsfunktionen π_i , införa en funktion vilken beskriver detta.

Definition 3.2. En nyttofunktion är en funktion $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller för alla $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ att

1. $u_i(\omega_1) > u_i(\omega_2)$ om och endast om $\omega_1 \succ \omega_2$
2. $u_i(\omega_1) = u_i(\omega_2)$ om och endast om $\omega_1 \sim \omega_2$.

Givet att det inte finns någon ovisshet gällande vad en viss handling a får för utfall som vi antagit, kan valet av optimal handling formuleras direkt i termer av nytta. Varje handling ger då ett bestämt utfall $\omega(a) \in \Omega$, och att maximera avkastning kan likställas med att maximera nyttofunktionen. Sambandet mellan avkastning och nytta kan därför skrivas som $\pi_i(a) = u_i(\omega(a))$. En rimlig utveckling är att föreställa sig det mer verklighetsnära fallet då en handling kan leda till en rad olika utfall i kontrast mot det deterministiska perspektivet behandlat i detta avsnittet samt hur konceptet kring rationalitet kan utvidgas.

3.2 Lotterier

När utfallet av en handling inte är känt med säkerhet kan vi inte längre identifiera avkastning med nyttighet på samma direkta sätt som i det deterministiska fallet. Istället modelleras osäkerheten

genom en representation som kopplar varje handling till en sannolikhetsfördelning över möjliga utfall. Vi vill alltså låta nytta enbart bero på utfall och avkastning bero på handling men införa statistisk vikt som beskriver sannolikheten att en handling a leder till utfall ω .

Definition 3.3. Ett lotteri λ är en mängd i vilken vardera element $p \in \lambda$ är sannolikheten att utfallet ω , för alla element $\omega \in \Omega$, inträffar. Sannolikheten att det specifika utfallet ω inträffar i ett lotteri λ betecknas $p(\omega|\lambda)$.

Mängden av alla lotterier med avseende på Ω betecknas Λ . För kommande definition av rationalitet definierar vi ett *sammansatt lotteri* som en linjärkombination av lotterier från samma mängd Λ med tillhörande sannolikheter eller vikter, benämnda q , att inträffa. Till exempel är $q\lambda_1 + (1-q)\lambda_2$ med $0 \leq q \leq 1$ ett sammansatt lotteri.

Definition 3.4. En aktör sägs vara rationell under ovisshet alternativt rationell om dess preferenser inför en uppsättning lotterier uppfyller

1. Fullständighet $\iff$ Antingen gäller $\lambda_1 \succeq \lambda_2$ eller $\lambda_2 \succeq \lambda_1$
2. Transitivitet $\iff$ Om $\lambda_1 \succeq \lambda_2$ och $\lambda_2 \succeq \lambda_3$ så gäller det att $\lambda_1 \succeq \lambda_3$
3. Monotonitet $\iff$ Om $\lambda_1 \succeq \lambda_2$ och $q_1 > q_2$ så gäller att $q_1\lambda_1 + (1-q_1)\lambda_2 \succ q_2\lambda_1 + (1-q_2)\lambda_2$
4. Kontinuitet $\iff$ Om $\lambda_1 \succeq \lambda_2$ och $\lambda_2 \succeq \lambda_3$ så existerar det en sannolikhet q sådan att $\lambda_2 \sim q\lambda_1 + (1-q)\lambda_3$
5. Självtändighet $\iff$ $\lambda_1 \succ \lambda_2$ så gäller att $q\lambda_1 + (1-q)\lambda_3 \succ q\lambda_2 + (1-q)\lambda_3$.

Fullständighet och transitivitet fyller samma funktion som beskrivet innan, monotonitet och kontinuitet säkerställer *slät* förändring i lotteriers gynnsamhet vid förändrad sannolikhet för ett specifikt utfall. Självtändighet säkerställer att preferens enbart beror på skillnaden mellan lotterierna.

Hur bör en spelare ta ställning till lotterier? Det vill säga; hur förhåller sig avkastningsfunktionen till lotterier? Det avgörs av individens nyttofunktion men det finns två storheter av större intresse, det *förväntade utfallets nytta*, det vill säga $u(\mathbb{E}(\omega))$, och *den förväntade nyttigheten* $\mathbb{E}(u(\omega))$.

Sats 3.5. Anta att en spelare är rationell under ovisshet. Vi kan definiera en nyttofunktion $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vilken uppfyller att då en rationell spelare i försöker maximera avkastningen $\pi_i(a)$ så försöker denne maximera den förväntade nyttigheten, det vill säga

$$\pi_i(a) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega|\lambda(a))u_i(\omega),$$

Vi kan nu tala om hur spelaren förhåller sig till risk. Om en spelares nyttofunktion uppfyller att *nyttan av det förväntade utfallet* är större än *den förväntade nyttan över utfall* så sägs spelaren ha en aversion mot risk, den föredrar säkerhet över potentiell nytta, medan om motsatsen gäller så sägs spelaren vara riskbenägen och värdesätter då potentiell nytta över säkerhet. Matematiskt beskrivs detta som $\mathbb{E}(u_i(\omega)) < u_i(\mathbb{E}(\omega))$ respektive $u_i(\mathbb{E}(\omega)) < \mathbb{E}(u_i(\omega))$. Vi illustrerar detta med ett exempel.

Exempel 3.6. Betrakta ett spel där spelaren antingen kan ingå i ett lotteri och få 100 kr eller 900 kr med lika sannolikhet, eller välja en garanterad summa på 500 kr. Låt den riskaversa spelaren, Spelare 1, ha den logaritmiska nyttofunktionen $u_1(\omega) = \ln(\omega)$ vilket innebär att marginalnyttan avtar med ökad förmögenhet. Den förväntade nyttan av att välja lotteriet ges då av

$$\mathbb{E}(u_1(\omega)) = \frac{1}{2} \ln(100) + \frac{1}{2} \ln(900) \approx 5.7$$

medan nyttan av det säkra beloppet ges av

$$u_1(\mathbb{E}(\omega)) = \ln(500) \approx 6.2.$$

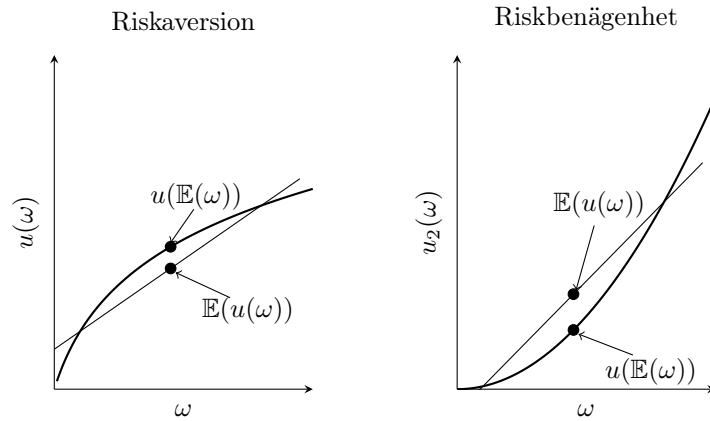
Eftersom $u_1(\mathbb{E}(\omega)) > \mathbb{E}(u_1(\omega))$ föredrar Spelare 1 det säkra beloppet framför lotteriet. Låt en riskbenägen spelare, Spelare 2 istället ha nyttofunktionen $u_2(\omega) = (\frac{\omega}{100})^2$, vilket innebär att marginalnyttan ökar med förmögenheten. Den förväntade nyttan av att välja samma lotteri ges då av

$$\mathbb{E}(u_2(\omega)) = \frac{1}{2}(\frac{100}{100})^2 + \frac{1}{2}(\frac{900}{100})^2 = 410$$

medan nyttan av det säkra beloppet ges av

$$u_2(\mathbb{E}(\omega)) = (\frac{500}{100})^2 = 25.$$

Eftersom $\mathbb{E}(u_2(\omega)) > u_2(\mathbb{E}(\omega))$ föredrar den riskbenägna spelaren lotteriet framför det säkra beloppet. Den generella principen om riskaversion och riskbenägenhet illustreras i Figur 1.



Figur 1: Riskaversion, konkavt u , ger $u(\mathbb{E}(\omega)) > \mathbb{E}(u(\omega))$, medan riskbenägenhet, konvext u , ger $u(\mathbb{E}(\omega)) < \mathbb{E}(u(\omega))$.

En naturlig fortsättning är att ställa sig frågan vilken roll slumpen spelar i handlingar i kontrast till slumpen i resultatet av bestämda handlingar, som behandlats i detta avsnitt.

3.3 Optimala beteenden

Om vi försöker hitta det förhållningssätt som maximerar avkastning bör vi inte avskriva möjligheten att avkastning kan gynnas av att involvera slumpmässighet i handlingsvalet. Anta att en individ står inför ett problem med möjliga handlingar ur en diskret och ändlig mängd $\mathbf{A}_i = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Om ovisshet existerar kring vilket resultat som en handling leder till, kan de olika fallen jämföras ur ett probabilistiskt perspektiv. Ovissheten kan modelleras som en slumpvariabel X med motsvarande sannolikheter, där slumpvariablarna antar värden motsvarande olika *tillstånd av omgivningen*, det kan till exempel vara ekonomiska förhållanden i en marknad eller ett land. Omgivningen är alltså systemet i vilket handlingarna utförs och som regleras av sannolikheter. Vidare ansätts $\mathbf{X}$ som mängden av alla tillstånd i den omgivningen. $P(X = x)$ betecknar sannolikheten för att ett visst tillstånd x ska antas. Om vi definierar avkastningen associerat med en handling benämmt a , för en spelare i , som $\pi_i(a|x)$, blir avkastningen som denna handling leder till under ovisshet

$$\pi_i(a) = \sum_{x \in \mathbf{X}} \pi_i(a|x)P(X = x). \quad (1)$$

Då blir det optimala handlingen för spelaren

$$a^* \in \arg \max_{a \in \mathbf{A}_i} \sum_{x \in \mathbf{X}} \pi_i(a|x)P(X = x). \quad (2)$$

Definition 3.7. Låt B beteckna mängden av möjliga generella beteenden. Ett generellt beteende $b \in B$ är en uppsättning sannolikheter $\{p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_m)\}$ för valet av vardera möjlig handling $a_k \in \mathbf{A}_i$.

Alltså är $p(a_k)$ sannolikheten för att handling a_k ska väljas i det specifika beslutstillfället.

Definition 3.8. Stödet är en mängd $\mathbf{M}(b) \subset \mathbf{A}_i$ för ett beteende b som består av alla handlingar för spelare i som uppfyller att $p(a_k) > 0$.

Stödet kan alltså tolkas som mängden av alla handlingar som ett visst beteende tillåter för. Notationen för stödet av ett element återkommer i annan kontext längre fram i texten och definieras på samma sätt som Definition 3.8. Avkastningen för beteende $b \in B$ fås då som summan av vardera möjlig handling avkastning viktat med dess respektive sannolikhet vilket matematiskt formuleras

$$\pi_i(b) = \sum_{a \in \mathbf{A}_i} p(a) \pi_i(a), \quad (3)$$

det vill säga det diskreta väntevärdet. Notera att Ekvation 3 tillåter för att inkludera ovisshet med avseende på omgivningens tillstånd även för beteenden, vilket blir en utökning av Ekvation 1 enligt

$$\pi_i(b) = \sum_{x \in X} P(X = x) \pi_i(b|x),$$

där x är omgivningens tillstånd. Optimum för beteenden definieras analogt till handlingar, se Ekvation 2. Följden blir att om b^* är ett optimalt beteende gäller att $\pi_i(b^*) \geq \pi_i(b)$ för alla $b \in B$. Med ovanstående terminologi fastställd kan frågan om vare sig maximal avkastning enbart kan erhållas genom att anamma ett slumpmässigt beteende besvaras.

Sats 3.9. Låt b^* vara ett optimalt beteende med stöd $\mathbf{M}(b^*)$. Då gäller för alla $\mathbf{M}(b^*)$

$$\pi_i(a) = \pi_i(b^*).$$

Bevis. Beviset redogör för fallet då $\mathbf{M}(b^*)$ innehåller fler än en handling, då handlingen $a \in \mathbf{M}(b^*)$ onekligen är optimal om den är det enda alternativet för handlingen i ett optimalt beteende. Börja med att anta motsatsen. Då måste det existera en handling $a \in \mathbf{M}(b^*)$ sådan att $\pi_i(a) \neq \pi_i(b^*)$ och, i synnerhet, ett $a^* \in \mathbf{M}(b^*)$ sådant att $\pi_i(a^*) > \pi_i(b^*)$.

$$\begin{aligned} \pi_i(b^*) &= \sum_{a \in A^*} p(a) \pi_i(a) \\ &= p(a^*) \pi_i(a^*) + \sum_{a \in A^* \setminus \{a^*\}} p(a) \pi_i(a) \\ &< p(a^*) \pi_i(a^*) + \sum_{a \in A^* \setminus \{a^*\}} p(a) \pi_i(a^*) \\ &= \pi_i(a^*) \end{aligned}$$

enligt satsen om total sannolikhet. Alltså är b^* inte optimal vilket är en motsägelse. $\square$

Resultatet säger oss att det alltid måste existera minst en optimal handling som ger samma avkastning som det optimala beteendet. En spelare är därför ej nödgad att involvera slumpmässiga beteenden om denne vill maximera sin avkastning i ett enkelbeslutsproblem. Nästa fråga att undersöka är hur våra modeller ändras om vi betraktar flera beslutstillfällen.

4 Enkla beslutsprocesser

För att kunna analysera strategiska situationer över tid krävs emellertid en modell där beslut fattas sekventiellt och där framtida val kan bero på tidigare handlingar. I detta kapitel studeras enkla beslutsprocesser för en enskild beslutsfattare. Beslutsprocesserna representeras med *beslutsträd* där varje *beslutsnod* motsvarar ett tillfälle då individen väljer en handling ur en given handlingsmängd. Utifrån dessa strukturer introduceras *strategier*, *strategiprofiler* och olika former av randomisering mellan *strategier*. Vidare behandlas *beteendestrategier* och deras relation till *blandade strategier*. Slutligen introduceras *optimala strategier* och *optimalitetsprincipen*, vilken ligger till grund för analys av dynamiska beslutssituationer.

4.1 Beslutsprocesser över tid

En beslutsprocess består av en sekvens av potentiella beslutspunkter där en aktör vid varje punkt väljer en handling ur en given handlingsmängd. Två komponenter av vad som föreslås vara strategiska beteenden illustreras. Där ena innefattar en avsaknad av en omedelbar belöning på grund av en förväntad framtida avlöning. Den andra innefattar istället en utgångspunkt där beroendet av andra spelare tas i beaktning. Processen kan avslutas innan samtliga beslutspunkter nås, beroende på tidigare val.

Definition 4.1. *Ett beslutsträd är en grafisk representation av en sekventiell beslutsprocess där en aktör ställs inför en följd av val över tid. Trädet består av beslutsnoder, vilka representerar punkter där aktören väljer en handling ur en given handlingsmängd, samt grenar som motsvarar de möjliga valen och deras konsekvenser. Mängden av alla beslutsnoder betecknas med H .*

Formellt representeras en beslutsprocess av ett $|H|$ antal beslutsnoder och en handlingsmängd $\mathbf{A}_j$ för varje nod $j \in H$.

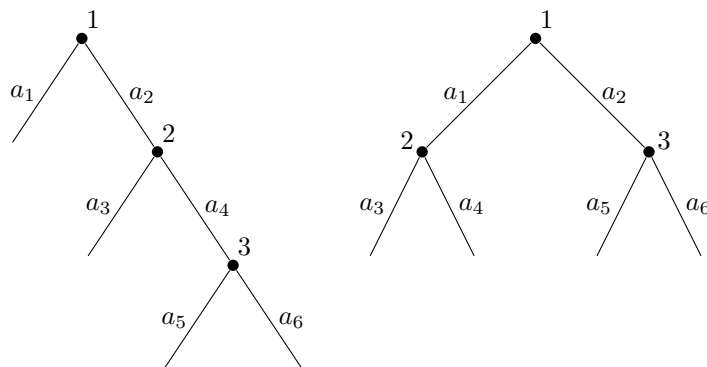
4.2 Strategier

Definition 4.2. *En strategi anger vilken handling som fattas i varje beslutsnod. En ren strategi, s , kallas en strategi där ett bestämt val görs vid varje beslutsnod utan randomisering. Alla rena strategier som finns i ett givet beslutsträd betecknas mängden $\mathbf{S}$.*

Anta att beslutsprocessen innehåller $|H|$ handlingssnoder och vid varje nod j finns en handlingsmängd där $\mathbf{A}_j$ beskriver handlingarna som kan göras vid beslutsnoden j . Då definieras mängden av rena strategier $\mathbf{S}$ enligt den kartesiska produkten över alla handlingsmängder:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \cdots \times \mathbf{A}_{|H|}. \quad (4)$$

Exempel 4.3. *Anta att det existerar tre beslutsnoder där handlingsmängderna är $\mathbf{A}_1 = \{a_1, a_2\}$, $\mathbf{A}_2 = \{a_3, a_4\}$ och $\mathbf{A}_3 = \{a_5, a_6\}$. Då ges den rena strategimängden enligt $\mathbf{S} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3$. Strategimängden kan appliceras i båda beslutsträden i Figur 2.*



Figur 2: Två beslutsträd som kan ge upphov till samma mängd rena strategier, $\mathbf{S} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3$ med beslutsnoder 1, 2 och 3.

Definition 4.4. *Resultatet av besluten som en individ fattar när den följer en viss strategi kallas för strategins utfall.*

En strategi beskriver dock mer än bara den väg som tas från toppen till botten av beslutsträdet. Den bestämmer även vilket val som skulle gjorts vid de noder som inte nås när strategin genomförs. Utfallet omfattar däremot endast de beslut som faktiskt tas. Strategin innehåller därför mer information än utfallet, och det observerade beteendet i form av vilka beslut som fattas speglar endast en del av den fullständiga strategin. Vidare kan en strategiprofil definieras enligt nedan.

Definition 4.5. Låt $N = \{1, \dots, n\}$ vara en ändlig mängd spelare, och för varje $i \in N$, låt S_i vara mängden av spelare i :s rena strategier. En strategiprofil $\hat{s}$ definieras då som

$$\hat{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \prod_{i \in N} S_i,$$

där $s_i \in S_i$ är den strategi som valts av spelare i . Mängden av alla strategiprofiler betecknas $\hat{\mathbf{S}}$.

Definitionen av avkastningsfunktion kan nu definieras mer rigoröst med hjälp av strategiprofiler enligt nedan.

Definition 4.6. För varje spelare $i \in N$ är en avkastningsfunktion en avbildning

$$\pi_i : \hat{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{R},$$

som till varje strategiprofil $\hat{s} \in \hat{\mathbf{S}}$ tilldelar ett reellt tal $\pi_i(\hat{s})$, vilket representerar spelare i :s avkastning.

Notera att det inte är av intresse att betrakta vad varje enskilt spelare gör ur kontexten av de andra spelarnas strategier.

4.3 Randomisering av strategier

Definition 4.7. En blandad strategi σ definieras som en sannolikhetsfördelning över mängden av rena strategier S . Den anger med vilken sannolikhet $p(s)$ varje ren strategi $s \in S$ väljs.

Alltså kan den blandade strategin representeras som sannolikhetsvektorn $\sigma = (p(s))_{s \in S}$ där $p(s) \geq 0$ för alla $s \in S$ och $\sum_{s \in S} p(s) = 1$. När alla sannolikheter är noll förutom en, får vi tillbaka den rena strategin, vilket därför kan ses som ett specialfall av en blandad strategi.

Om vi betraktar S som en ordnad mängd kan vi därför uttrycka en spelares rena strategier på vektorform.

Exempel 4.8. Låt $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. På vektorform kan vi skriva $s_1 = (1, 0, 0, 0)$, $s_2 = (0, 1, 0, 0)$ och dylikt för s_3 och s_4 .

En blandad strategi kan därför skrivas som en viktad summa av rena strategier, där vikterna ges av sannolikheterna $p(s)$ enligt

$$\sigma = \sum_{s \in S} p(s) s.$$

Definition 4.9. Stödet $\mathbf{M}(\sigma)$ till en blandad strategi är den delmängd som består av alla rena strategier som tilldelas positiv sannolikhet.

Detta är alltså de rena strategier som kan komma att spelas under den blandade strategin. Exempelvis kan mängden av rena strategier $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ användas till att skapa den blandade strategin $\sigma = (0.3, 0, 0.7, 0)$, där stödet för denna skrivs då som $\mathbf{M}(\sigma) = \{s_1, s_3\}$.

Definition 4.10. En beteendestrategi β beskriver för varje nod en söver handlingsmängden för den noden.

Intuitivt innebär detta att besluten slumpas lokalt vid varje beslutspunkt i trädet, till skillnad från blandade strategier som randomiserar över hela mängden av rena strategier.

Definition 4.11. En blandad strategi och en beteendestrategi kallas ekvivalenta om de ger upphov till samma sannolikheter för alla rena strategier.

Sats 4.12. Vi formulerar nu ett samband mellan beteendestrategi och blandad representation:

1. Varje beteendestrategi har en blandad representation.

2. Varje blandad strategi har en beteendemässig representation.

Bevis. Vi bevisar både del 1 och 2 av satsen.

1. Som tidigare, låt H vara mängden av alla noder som finns i beslutsträdet och $j \in H$ vara en nod och $\mathbf{A}_j$ då vara mängden handlingar tillgänglig vid nod j för den person vars beslutsträd betraktas.

En enskild spelare som tillämpar en ren strategi s passerar en mängd beslutsnoder $H(s) \subseteq H$ genom att välja en handling $a_j(s) \in \mathbf{A}_j$ vid varje nod $j \in H(s)$. En beteendestrategi β kan tilldela sannolikheten $p(a_j(s))$ till varje handling vid varje nod och sannolikheten att genomgå en hel ren strategi s är produkten av dessa längs vägen

$$p(s) = \prod_{j \in H(s)} p(a_j(s)).$$

En blandad strategis representation av β ges då som

$$\sigma_\beta = \sum_{s \in \mathbf{S}} p(s)s$$

då

$$\sum_{s \in \mathbf{S}} \prod_{j \in H(s)} p(a_j(s)) = 1.$$

2. Låt $\sigma = \sum_{s \in \mathbf{S}} p(s)s$ vara en blandad strategi. För varje beslutsnod j låt $\mathbf{S}(j) \subseteq \mathbf{S}$ vara mängden rena strategier som når nod j , och för varje handling $a_j \in \mathbf{A}_j$, låt $\mathbf{S}(a_j, j) \subseteq \mathbf{S}(j)$ vara de rena strategier som väljer handling a_j vid nod j . Beteckna sannolikheten att nå nod j under σ som

$$p_\sigma(j) = \sum_{s \in \mathbf{S}(j)} p(s)$$

och då sannolikheten att nå j och välja a_j som

$$p_\sigma(a_j, j) = \sum_{s \in \mathbf{S}(a_j, j)} p(s).$$

För varje nod j med $p_\sigma(j) \neq 0$ definierar vi sannolikheten att välja a_j vid j som $p(a_j) = \frac{p_\sigma(a_j, j)}{p_\sigma(j)}$. Eftersom $\mathbf{S}(a_j, j)$ för olika $a_j \in \mathbf{A}_j$ partitionerar $\mathbf{S}_j$ gäller det

$$\sum_{a_j \in \mathbf{A}_j} p(a_j) = \frac{\sum_{a_j \in \mathbf{A}_j} p_\sigma(a_j, j)}{p_\sigma(j)} = \frac{p_\sigma(j)}{p_\sigma(j)} = 1$$

så $p(a_j)$ definierar en giltig sannolikhetsfördelning vid varje nod. Samlingen av dessa fördelningar för alla j utgör en beteendestrategi vilket är den beteendemässiga representationen av σ .

□

Ekvivalensen medför att valet av representation inte påverkar sannolikheten hos de olika utfallen eller de förväntade avkastningarna. Därmed kan man alltid välja den representation som passar bäst för problemet i fråga. Det visar sig även att det alltid finns en optimal handling i enskilda beslut inom beslutsprocesser.sannolikhetsfördelning

4.4 Optimala strategier

Lemma 4.13. Låt σ^* vara en optimal blandad strategi för en enskild spelare, med stöd S^* . Då gäller $\pi_i(s) = \pi_i(\sigma^*)$ för alla $s \in S^*$.

Bevis. Om S^* endast innehåller en strategi är lemmat trivialt. Antag nu att S^* innehåller mer än en strategi. Om påståendet är falskt ger minst en strategi en högre utdelning än $\pi_i(\sigma^*)$. Låt $\pi_i(s')$ ge högst vinst. Då gäller

$$\begin{aligned}\pi_i(\sigma^*) &= \sum_{s \in S^*} p(s)\pi_i(s) = \sum_{s \in S^* \setminus \{s'\}} p(s)\pi_i(s) + p(s')\pi_i(s') \\ &< \sum_{s \in S^* \setminus \{s'\}} p(s)\pi_i(s') + p(s')\pi_i(s') = \pi_i(s'),\end{aligned}$$

vilket motsäger antagandet att σ^* är optimal. $\square$

Sats 4.14. För varje beslutsprocess följer att en optimal ren strategi kan hittas.

Bevis. Från Teorem 4.12 vet vi att varje beteendestrategi åtminstone har en ekvivalent blandad strategi. Det följer att ingen beteendestrategi kan ha en större utdelning gentemot den som kan fås utifrån användning av blandad strategi. Det följer därmed från föregående lemma att om en optimerad blandad strategi existerar, då finns även en optimal ren strategi. $\square$

Hittills har vi nu studerat beslutsprocesser för en enskild spelare. För att kunna formulera och bevisa existenssatsen för Nashjämvikt behöver vi utvidga ramverket till situationer där flera spelare interagerar strategiskt i så kallade så kallade icke-kooperativa spel. För större beslutsträd ökar arbetsgången exponentiellt. Ett träd med n beslutsnoder vardera med 2 möjliga handlingar ger 2^n rena strategier. För att underlätta introduceras *Optimalitetsprincipen*. Principen menar på att om önskan för optimala beslut för ett beslutsproblem finns, gäller det att anta optimerat beslutsfattande i framtiden.

Följande definition ges i förebyggande syfte för att sedan introducera Optimalitetsprincipen.

Definition 4.15. En partiell historia $\tilde{j}$ är följden av beslut som har fattats av en individ fram till en viss given tidpunkt eller en beslutsnod j . Vid starten av en beslutsprocess (när inga beslut ännu har fattats) har vi nollhistoriken, $\tilde{j} = \emptyset$. En fullständig historia för en strategi benämnd s , är den fullständiga följden av alla beslut som skulle fattas av en individ som följer den strategin, och den betecknas $\tilde{H}(s)$.

Anmärkning 4.16. Om en individ har perfekt minne, att den minns alla sina tidigare beslut, så har varje beslutsnod en unik historia och varje historia bestämmer en unik (aktuell) beslutsnod.

Definiera delmängden av rena strategier $S(\tilde{j}) \subseteq S$ som innehåller alla strategier med historia $\tilde{j}$, men som kan skilja sig åt i de handlingar som väljs i framtiden. Den optimala utdelning π_i^* som en individ i kan uppnå givet att historien är $\tilde{j}$ ges då av

$$\pi_i^*(s \mid \tilde{j}) = \max_{s \in S(\tilde{j})} \pi(s).$$

Antag nu att individen har ett val från en handlingsmängd $A_{\tilde{j}}$ vid den nod j som nås av att följa $\tilde{j}$. Efter att beslutet har fattats kommer historiken att vara följden $\tilde{j}$ med den valda handlingen a tillagd. Vi skriver detta som $\tilde{j}, a$.

Sats 4.17 (Optimalitetsprincipen). För en individ med perfekt minne gäller:

1. $\pi_i^*(s \mid \tilde{H}(s)) = \pi_i(s)$,
2. $\pi_i^*(s \mid \tilde{j}) = \max_{a \in A_{\tilde{j}}} \pi_i^*(s \mid \tilde{j}, a)$,
3. $\pi_i^* = \max_{s \in S(\emptyset)} \pi_i^*(s \mid \emptyset)$.

Bevis. Vi bevisar nu alla tre delar av satsen.

1. Enligt definitionen av $\tilde{H}(s)$ har individen inga fler beslut att fatta, och den bästa avkastning som kan uppnås är den som redan erhålls genom att följa strategin s .
2. En ren strategi är en följd av handlingar

$$s = \{a_0, a_1, \dots, a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_H\},$$

så att

$$\pi_i(s) = \pi_i(a_0, a_1, \dots, a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_H).$$

Låt den partiella historien $\bar{h}$ vara den givna följderna $\{a_0, a_1, \dots, a_j\}$. Då gäller

$$\pi_i^*(s \mid \tilde{j}) = \max_{a_{j+1}, \dots, a_H} \pi_i(a_0, a_1, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_H) = \max_{a_{j+1}} \pi_i^*(s \mid \tilde{j}, a_{j+1}).$$

3. Historien $\tilde{j} = \emptyset$ betecknar optimeringsproblemet från början. Alltså är $S(\emptyset) = S$, och

$$\max_{s \in S(\emptyset)} \pi_i^*(s \mid \emptyset) = \max_{s \in S} \pi_i(s) = \pi_i^*.$$

□

Principen leder direkt till en bekväm lösningsmetod av dynamiska beslutsproblem. Om de optimala besluten vill hittas först, genom att anta ett krav på framtida optimala beslut, är det logiskt att börja vid de framtida besluten. Det vill säga att arbeta baklänges i beslutsträden genom så kallad *baklängesinduktion*. Proceduren illustreras i ett applikationsexempel i underavsnitt 7.3.

Vi har nu formulerat några av spelteorins grunder för att kunna formulera och bevisa Existenssatsen av Nashjämvikt i ändliga spel vilket är arbetets huvudfokus. Vi har även visat ekvivalens mellan representationer av slumpmässighet. Detta för att enbart behöva bevisa satsen för ett visst sätt att modellera slumpmässighet men bevara giltigheten för alla representationer.

5 Existenssatsen om Nashjämvikt

Innan vi kan definiera Nashjämvikt, definierar vi nu icke-kooperativa spel, vilket utgör den klass av spel där Nashs jämviktssats appliceras.

Definition 5.1. *Ett icke-kooperativt spel är ett spel där varje spelare fattar ett beslut utifrån att självständigt maximera sin egen nytta utan samarbete eller bindande överenskommelse med andra spelare.*

En jämviktpunkt för icke-kooperativa spel definieras för att ge underlag för Nashjämvikt.

Definition 5.2. *En jämviktpunkt i ett icke-kooperativt spel är en strategikombination där ingen spelare kan förbättra sin nytta genom att ensidigt byta strategi, givet att övriga spelares strategier hålls fasta.*

För att ytterligare förtydliga spelet som betraktas i behandlingen av Nashs jämviktssats förtydligas även ändliga spel här

Definition 5.3. *I ett ändligt spel har varje spelare ett ändligt antal blandade strategier.*

Följande två definitioner kommer också att användas i behandlingen av mängden blandade strategier och presenteras därför här

Definition 5.4. *En mängd $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ kallas konvex om för alla $x, y \in \Sigma$ och alla $\lambda \in [0, 1]$ gäller att $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Sigma$.*

Definition 5.5. *En mängd $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ kallas kompakt om den är sluten och begränsad.*

Vi har nu alla verktyg för att introducera satsen om Nashjämvikt.

Sats 5.6. *För varje ändligt icke-kooperativt spel existerar alltid minst en Nashjämviktpunkt.*

Satsens resultat kan anses förvånande då det är långt ifrån uppenbart att en sådan jämvikt alltid ska existera då alla spelare har motstridiga intressen och ingen central koordinering. Vi ger nu en kort överblick av hur kommande bevis kommer fram till detta. I beviset som följer konstrueras en funktion T vilken ska uppfylla förutsättningarna för Brouwers fixpunktssats Teorem 6.1, detta för att understryka existensen av fixpunkter, och att dess fixpunkter ska sammanfalla med Nashjämvikter. Vi önskar att T tar en strategiprofil och förbättrar vardera strategi om möjligt, det vill säga återger en förbättradstrategi vilket säkerställer att T avbildar mängden av alla strategiprofiler på sig själv. Kontinuitetskravet uppfylls då avkastningsfunktionen, och således förbättringsfunktionen är kontinuerliga.

Slutligen visas att fixpunkter under T sammanfaller med Nashjämvikter, det vill säga att T enbart har fixpunkter där ingen spelare kan förbättra sin strategi. Rent intuitivt kan man förstå det som om T alltid gick att förbättra skulle T sakna fixpunkter, men då strategirummet är begränsat måste processen stanna någonstans och den punkten är då en Nashjämvikt.

6 Bevis av Existenssatsen om Nashjämvikt

I det här avsnittet bevisas Nashjämvikt med hjälp av Brouwers fixpunktssats, baserat på Nashs originalartikel från 1951 [2]. Definitioner, terminologi och resonemang är baserade på denna artikel om inget annat anges.

Sats 6.1. *Låt $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ vara konvex, kompakt och icke-tom. Om $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ är kontinuerlig så existerar det en fixpunkt.*

Denna sats kommer användas utan att bevisas, se Appendix B för bevis av ett specialfall av satsen. Innan vi kan presentera beviset för satsen om Nashjämvikt behövs några definitioner och beteckningar klargöras. Låt $r_i \in \Delta_{m_i}$ beteckna en godtycklig blandad strategi för spelare i , där Δ_{m_i} är mängden av blandade strategier för spelare i . En strategiprofil $\hat{\sigma}$, som definieras i Definition 4.5, är en jämviktpunkt om och endast om ingen spelare kan förbättra sin avkastning genom att ändra strategi. Det vill säga om

$$\pi_i(\hat{\sigma}) = \max_{r_i} \pi_i(\hat{\sigma}; r_i)$$

för alla spelare i . Här betecknar $\pi_i(\hat{\sigma}; r_i)$ avkastningen av en strategiprofil där spelare i ensidigt byter strategi. Låt σ_i vara spelare i 's blandade strategi i $\hat{\sigma}$. Villkoret säger alltså att σ_i är ett bästa svar mot de övriga spelarnas strategier σ_{-i} . Eftersom avkastningsfunktionen är linjär i spelarens egen blandade strategi, och $s_{i,\alpha}$ betecknar spelare i 's α :te rena strategi, gäller

$$\max_{r_i} \pi_i(\hat{\sigma}; r_i) = \max_{\alpha} \pi_i(\hat{\sigma}; s_{i,\alpha}),$$

Vidare, för att beskriva rummet av blandade strategier som uppfyller kriterierna för Brouwers sats behöver ny notation introduceras. Låt $c_{i,\alpha}$ vara sannolikheten att spelare i väljer den rena strategin $s_{i,\alpha}$ och m_i vara antalet rena strategier tillgängliga för spelare i . Ett simplex för spelare i definieras då som

$$\Delta_{m_i} = \left\{ c \in \mathbb{R}_+^{m_i} : \sum_{\alpha=1}^{m_i} c_{i,\alpha} = 1 \right\}.$$

Simplexet Δ_{m_i} är alltså mängden av alla blandade strategier för spelare i och utgör en faktor i produkten

$$\Sigma = \prod_{i=1}^n \Delta_{m_i} \subset \mathbb{R}^M, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$

där Σ betecknar mängden av alla blandade strategiprofiler. Det innebär att för m_i rena strategier är det blandade strategirummet för spelare i ett $(m_i - 1)$ -dimensionellt simplex. Om varje ren

strategi $s_{i,\alpha}$ förknippas med en basvektor i $\mathbb{R}^{m_i}$ så att $\mathbf{s}_{i,1} = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{s}_{i,2} = (0, 1, \dots, 0)$ och så vidare kan den blandade strategin för spelare i skrivas som

$$\sigma_i = \sum_{\alpha=1}^{m_i} c_{i,\alpha} \mathbf{s}_{i,\alpha} = (c_{i,1}, \dots, c_{i,m_i}) \in \Delta_{m_i}$$

En blandad strategiprofil är då en n -tupel $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Sigma$, det vill säga ett val av blandade strategier för var och en av de n spelarna. Avkastningsfunktionen för spelare i , som tidigare definierats för rena strategier i Definition 4.6, utvidgas till blandade strategiprofiler enligt

$$\pi_i(\hat{\sigma}) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \left(\prod_{j=1}^n c_{j,\alpha_j} \right) \pi_i(s_{1,\alpha_1}, \dots, s_{n,\alpha_n}), \quad (5)$$

I beviset diskuteras även endast bytet till rena strategier, vilket vi nu visar är tillräckligt. Anledningen till varför endast rena strategier beaktas är att avkastningsfunktionen är linjär i σ_i , vilket innebär att avkastningen av en blandad strategi är ett viktat medelvärde av avkastningen för rena strategier. Detta kan ses via

$$\pi_i(\hat{\sigma}; r_i) = \pi_i \left(\hat{\sigma}; \sum_{\alpha} c_{i,\alpha} \mathbf{s}_{i,\alpha} \right) = \sum_{\alpha} c_{i,\alpha} \pi_i(\hat{\sigma}; \mathbf{s}_{i,\alpha})$$

där $c_{i,\alpha}$ kan tolkas som en viktning. Då ett medelvärde aldrig är större än sitt maximum har vi

$$\sum_{\alpha} c_{i,\alpha} \pi_i(\hat{\sigma}; \mathbf{s}_{i,\alpha}) \leq \max_{\alpha} \pi_i(\hat{\sigma}; \mathbf{s}_{i,\alpha})$$

med likhet när all vikt läggs på de rena strategier som uppnår maximum.

Bevis av existens av Nashjämvikt. Vi konstruerar en kontinuerlig avbildning T på rummet av n -tuplar sådana att fixpunkterna av T är jämviktspunkterna i spelet. Låt $\pi_i(\sigma)$ vara avkastningsfunktionen för spelare i för en blandad strategi. På motsvarande sätt skrivs avkastningsfunktion om personen väljer att byta till dess α :te rena strategi, $s_{i,\alpha}$, som $\pi_{i,\alpha}(\sigma)$. Mer tydligt kan vi säga att $\pi_{i,\alpha}(\sigma) := \pi_i(\sigma, s_{i,\alpha})$ medans resterande spelare fortsätter använda deras blandade strategier enligt $\hat{\sigma}$. Vi kan då definiera en funktion

$$\varphi_{i,\alpha}(\sigma) = \max(0, \pi_{i,\alpha}(\sigma) - \pi_i(\sigma)). \quad (6)$$

För vardera komponent σ_i i $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ definierar vi en modifikation σ'_i genom

$$\sigma'_i = \frac{\sigma_i + \sum_{\alpha} \varphi_{i,\alpha}(\sigma) s_{i,\alpha}}{1 + \sum_{\alpha} \varphi_{i,\alpha}(\sigma)}$$

vilket ger $\hat{\sigma}' = (\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n)$. Vi ska nu visa att fixpunkterna för avbildningen $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$ är jämviktspunkter. För att kravet för transformationen T givet i Brouwers sats ska gälla behöver σ'_i vara en giltig blandad strategi, vilket är sant. Alla termer är icke-negativa eftersom $\varphi_{i,\alpha}(\sigma) \geq 0$, och

$$\sum_{\alpha=1}^{m_i} \sigma'_i s_{i,\alpha} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{m_i} \sigma_i s_{i,\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{m_i} \varphi_{i,\alpha}(\sigma) s_{i,\alpha}}{1 + \sum_{\alpha=1}^{m_i} \varphi_{i,\alpha}(\sigma)} = 1.$$

Alltså gäller $\sigma'_i \in \Delta_{m_i}$ och därmed $T(\sigma) \in \Sigma$.

Avkastningsfunktionerna $\pi_i(\sigma)$ och $\pi_{i,\alpha}(\sigma)$ är kontinuerliga då de är ändliga summor av produkter av sannolikhetskomponenter enligt Ekvation 5. Därmed är även $\varphi_{i,\alpha}$ kontinuerlig då den är ett maximum av två kontinuerliga funktioner enligt Ekvation 6. Det följer att T är en kontinuerlig transformation då transformationen definieras komponentvis av kontinuerliga funktioner och nämnaren alltid är nollskild.

Betrakta en n -tupel $\hat{\sigma}$, spelarens i 's blandade strategi σ_i kommer använda vissa av sina rena strategier. En del av dessa rena strategier, säg $s_{i,\alpha}$, kommer vara suboptimala sådana att $\pi_{i,\alpha}(\sigma) \leq \pi_i(\sigma)$, vilket i sin tur leder till att $\varphi_{i,\alpha}(\sigma) = \max(0, \pi_{i,\alpha}(\sigma) - \pi_i(\sigma)) = 0$. Om n -tupeln $\hat{\sigma}$ råkar vara bestämd under transformatorn T så kommer proportionen av $s_{i,\alpha}$ som används i σ_i inte bli minskad av T . Alltså, för alla β så måste $\varphi_{i,\beta}(\sigma)$ vara noll för att hindra nämnaren $1 + \sum_{\alpha} \varphi_{i,\alpha}$ i Ekvation 6 från att öka från 1. Detta innebär att om σ är bestämd under T för valfritt i och β , $\varphi_{i,\beta}(\sigma) = 0$. Ingen spelare kan därav förbättra sin avkastning genom att byta till en ren strategi $s_{i,\beta}$, vilket är ett kriterium för jämviktspunkter enligt Definition 5.2. Omvänt gäller även att om $\hat{\sigma}$ är en jämviktspunkt så är det även en fixpunkt under T och alla φ försvinner. Eftersom strategirummet Σ är kompakt och konvext, se D.2, och $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ är kontinuerlig, följer av Teorem 6.1 att T har minst en fixpunkt, som motsvarar en jämviktspunkt. $\square$

6.1 Exempel

För att bättre illustrera hur Nashjämvikt fungerar kommer det introduceras ett exempel nedan med förklaring. Exemplet är taget ur Nash ursprungliga bevis och är omskrivet till moderna spelteoretisk notationer för att lättare illustrera teorin.

Exempel 6.2. Anta att det finns två spelare, Spelare 1 och Spelare 2 med strategier a, b respektive α, β . Avkastningen för de två spelarnas strategier är beroende på den andra spelaren med följande tabell.

	α	β
a	$(5, -3)$	$(-4, 4)$
b	$(-5, 5)$	$(3, -4)$

Alltså om Spelare 1 väljer strategi a och Spelare 2 väljer strategi α får spelarna avkastningen $(5, -3)$. För att bestämma den förväntade avkastningen för Spelare 1 givet att Spelare 2 väljer α med sannolikhet p och β med sannolikhet $1 - p$ beräknar vi avkastningen som

$$\pi_1(a) = 5p + (-4)(1 - p) = 9p - 4$$

$$\pi_1(b) = (-5)p + 3(1 - p) = 3 - 8p.$$

För att Spelare 1 ska vara indifferent mellan strategierna a och b krävs det att de ger samma förväntade avkastning. $9p - 4 = 3 - 8p$ vilket medför att $p = \frac{9}{16}$ och $1 - p = \frac{7}{16}$. Genom att beräkna samma sannolikhet för Spelare 2 får vi

$$\sigma_1 = \left(\frac{9}{16}a, \frac{7}{16}b\right)$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{7}{17}\alpha, \frac{10}{17}\beta\right)$$

som blandade strategier för de två spelarna. I jämvikt är båda spelarna indifferent mellan de rena strategier som ingår i deras blandade strategier. Om Spelare 2 använder sin blandade strategi får Spelare 1 därför samma förväntade avkastning av att spela a som av att spela b . På motsvarande sätt får Spelare 2 samma förväntade avkastning av att spela α som av att spela β , givet att Spelare 1 använder sin blandade strategi.

Ingen av spelarna kan därför förbättra sin avkastning genom att ensidigt ändra strategi. Strategi-profilen utgör därmed en Nashjämvikt.

7 Applikationer av Nashjämvikt för kontinuerliga system

Vi har visat att Nash existenssats gäller för ändliga spel med diskreta strategimängder. Teorin kan dock expanderas till begränsade kontinuerliga system vilket bättre beskriver många verkliga fenomen där aktörer väljer handlingar ur en kontinuerlig mängd istället för en diskret mängd. Kontinuerliga system kan användas för att beskriva ekonomiska duopol, en marknad med endast två

aktörer, där strategirummen är kontinuerliga delmängder av $\mathbb{R}$ och där Nashjämvikter kan existera som rena strategier.

Det finns tre klassiska duopolmodeller som beskriver olika former av konkurrens mellan två företag på en gemensam marknad. Vi studerar hur Nashjämvikter uppstår och karakteriseras inom dessa modeller. De tre modellerna är Cournot-, Bertrand- och Stackelbergmodellen. De skiljer sig i när de agerar, om företagen kan styra priset eller kvantitet och hur marknaden reagerar. Detta gör att de olika modellerna lämpar sig för olika marknader med olika marknadsförutsättningar. Översiktligt illustreras detta i följande Tabell 2.

Modell	Strategisk variabel	Timing	Typisk marknad
Cournot	Kvantitet	Samtidigt	Produktionsbegränsade marknader
Stackelberg	Kvantitet	Sekventiellt	Marknader med ledande aktör
Bertrand	Pris	Samtidigt	Priskonkurrens, homogena varor

Tabell 2: Skillnad mellan Cournot-, Stackelberg- och Bertrandmodellen

Följande beskrivningar av de tre modellerna baseras till stor del på de beskrivningar som ges i [11].

7.1 Bertrandmodellen

Den enklaste modellen är Bertrandduopol där mängden av produkter konsumerade bestäms av produktens pris och de två bolagen bestämmer sitt pris vid samma tidpunkt. Modellen antar att det företag med lägre produktpris erhåller hela marknaden medan företaget med högre pris inte säljer någonting. Detta modelleras genom ett simultant spel där varje företag $i \in \{1, 2\}$ väljer ett pris $\rho_i \in [0, \infty)$. Antag att marginalkostnaden, kostnaden för att producera en produkt, är konstant och ges av ξ . Låt vidare $D(\rho)$ vara efterfrågefunktionen som beskriver marknadens efterfrågan vid pris ρ där $D'(\rho) < 0$. Då definieras företags i :s avkastningsfunktion π_i som

$$\pi_i(\rho_1, \rho_2) = \begin{cases} (\rho_i - \xi)D(\rho_i), & \rho_i < \rho_j \\ \frac{1}{2}(\rho_i - \xi)D(\rho_i), & \rho_i = \rho_j \\ 0, & \rho_i > \rho_j. \end{cases}$$

Framöver i detta kapitel används vinstfunktion och vinst i stället för avkastningsfunktion och avkastning, i linje med etablerad ekonomisk terminologi. Genom eliminering av dominerade strategier, vilket är en strategi som alltid ger lägre vinst oavsett vad motståndaren gör, visar vi att en Nashjämvikt uppstår då $\rho_1^* = \rho_2^* = \xi$. Antag först att $\rho_1 > \xi$. Då kan motståndaren välja priset $\rho_2 = \rho_1 - \epsilon$ där $\epsilon > 0$ och erhålla hela marknaden med vinst. Varje pris strikt över marginalkostnaden ξ kan alltså underbjudas. För $\rho_1 < \xi$ går företaget gå med förlust, det vill säga $\pi_1 < 0$. Samma resonemang kan sedan föras för Företag 2. Den strategi som återstår är då $\rho_1^* = \rho_2^* = \xi$. Vi ser då enligt Bertrandmodellen att Nashjämvikt uppstår då båda företagen låter produktpriset vara samma som marginalkostnaden. Detta fenomen kallas för Bertrandparadoxen då detta leder till att företagen ej går med vinst och skulle därför inte ha incitament att producera varor. För att komma runt denna paradox brukar en utvidgad version av Bertrandmodellen användas där företagens varor skiljer sig åt i kvalitet eller varumärke och efterfrågan därmed inte koncentreras till det lägsta priset.

7.2 Cournotmodellen

Till skillnad från Bertrandmodellen där företagen konkurrerar genom att sätta priser antar Cournotmodellen att företagen istället väljer kvantiteten av produkten. Priset bestäms istället av den totala producerade mängden genom den inversa marknadsefterfrågefunktionen, $P(Q)$. Den strategiska variabeln är således kvantitet istället för pris. Antag därför att företag $i \in \{1, 2\}$ producerar mängden q_i av produkten, då är den totala mängden produkter på marknaden $Q = q_1 + q_2$. Vi

antar nu den linjära inversa efterfrågefunktionen

$$P(Q) = \begin{cases} P_0 \left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) & Q < Q_0 \\ 0 & Q \geq Q_0 \end{cases} \quad (7)$$

där $P_0 = P(0)$, alltså representerar P_0 det maximala priset på marknaden och anger priset då total produktion är noll och kallas även för reservationspriset. Q_0 anger den totala kvantiteten vid vilket priset faller till noll och kan tolkas som marknads mättnadsnivå. Det vill säga $P(Q_0) = 0$. Vidare antar vi att produktionskostnaderna är samma för alla produkter och det finns ingen initialkostnad, produktionskostnaden för företag i blir då ξq_i . Vinstfunktionen blir då

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(Q) - \xi q_i.$$

För att finna en Nashjämvikt undersöker vi vilka kvantiteter (q_1^*, q_2^*) som maximerar vinstfunktionen och är det bästa svaret på motståndarens val av kvantitet. Vi undersöker detta för Företag 1 givet ett värde på q_2 genom att undersöka när q_1 maximeras. Låt $\hat{q}_1 = \max(q_1|q_2)$, då fås

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}(\hat{q}_1, q_2) &= 0 \\ P(Q) + \hat{q}_1 P'(Q) - \xi &= 0 \\ P_0 \left(1 - \frac{\hat{q}_1 + q_2}{Q_0}\right) - \frac{\hat{q}_1 P_0}{Q_0} - \xi &= 0 \\ \hat{q}_1 &= \frac{Q_0}{2} \left(1 - \frac{q_2}{Q_0} - \frac{\xi}{P_0}\right). \end{aligned}$$

Vi har alltså hittat en stationär punkt för $\hat{q}_1$, om $\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} < 0$ är det även en maxpunkt. Vi har

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2}(\hat{q}_1, q_2) = -\left(\frac{P_0}{Q_0}\right) < 0$$

vilket visar att vårt uttryck för $\hat{q}_1$ maximerar vinsten för Företag 1. På samma sätt löser vi för $\hat{q}_2$ givet en fixt mängd q_1 och får

$$\hat{q}_2 = \frac{Q_0}{2} \left(1 - \frac{q_1}{Q_0} - \frac{\xi}{P_0}\right).$$

Nashjämvikten hittas då genom att lösa ekvationerna för $\hat{q}_1$ och $\hat{q}_2$ samtidigt. Nashjämvikten (q_1^*, q_2^*) blir då

$$q_1^* = q_2^* = \frac{Q_0}{3} \left(1 - \frac{\xi}{P_0}\right)$$

Då $q_1^* = q_2^*$ betecknar vi detta med q^* . Vid denna jämvikt är båda företagens vinstfunktion samma och är

$$\pi_1(q^*, q^*) = \pi_2(q^*, q^*) = \frac{Q_0 P_0}{9} \left(1 - \frac{\xi}{P_0}\right)^2.$$

Jämviktstvinsten är strikt positiv så länge marginalkostnaden understiger maximal betalningsvilja, annars gäller $q_1^* = q_2^* = 0$. Vinsten är proportionell mot marknads storlek och avtar kvadratisk då kostnaden närmar sig reservationspriset. Resultatet visar att Cournotkonkurrens ger positiva vinster, i kontrast till Bertrandmodellen där jämviktstvinsten är noll.

7.3 Stackelbergmodellen

I Stackelbergmodellen, likt Cournotmodellen, väljer företagen hur stor kvantitet q_i de ska producera av sin vara samt att marknadspriset för produkten bestäms enligt tidigare funktion 7.

Skillnaden ligger däremot i hur besluten fattas. Till skillnad från Cournotmodellen, där företagen väljer sina kvantiteter samtidigt, sker besluten i Stackelbergmodellen sekventiellt. Företag 1, marknadsledaren, bestämmer först sin produktionsnivå. Därefter reagerar Företag 2 på detta val och väljer sin kvantitet som marknadsföljare. Precis som i tidigare modeller antar vi att båda företagen strävar efter att maximera sin vinst.

Vi löser spelet med hjälp av baklängesinduktion för att identifiera en delspels-perfekt Nashjämvikt vilket innebär att man börjar från slutet av spelet och räknar bakåt steg för steg för att nå Nashjämvikt. Först bestämmer vi Företag 2:s bästa respons $\hat{q}_2(q_1)$, för varje möjlig produktionsnivå som Företag 1 kan välja.

Eftersom Företag 1 känner till bästa responsen för Företag 2 kan vi därefter analysera Företag 1:s optimeringsproblem. En Nashjämvikt fås genom att fastställa den produktionsnivå som maximerar Företag 1:s vinst, under förutsättningen att Företag 2 alltid har en optimal anpassning. Företag 2:s vinst ges då av ekvationen

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(P(Q) - \xi),$$

och den bästa responsen på ett givet val av q_1 fås genom att lösa optimeringsproblemet för q_2 . Det vill säga genom att maximera vinsten med avseende på q_2 givet q_1 . Villkoret för ett maximum är $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}(q_1, \hat{q}_2) = 0$ vilket ger

$$\hat{q}_2(q_1) = \frac{Q_0}{2} \left(1 - \frac{q_1}{Q_0} - \frac{\xi}{P_0} \right).$$

Om Företag 1 väljer q_1 och Företag 2 väljer det bästa svaret $\hat{q}_2(q_1)$ blir vinsten för Företag 1

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, \hat{q}_2(q_1)) &= q_1 \left[P_0 \left(1 - \frac{q_1 + \hat{q}_2(q_1)}{Q_0} \right) - \xi \right] \\ &= q_1 \frac{P_0}{2} \left(1 - \frac{q_1}{Q_0} - \frac{\xi}{P_0} \right). \end{aligned}$$

Då kommer Företag 1 maximera sin vinst vid

$$\hat{q}_1 = \frac{Q_0}{2} \left(1 - \frac{\xi}{P_0} \right).$$

Detta leder till en Nashjämvikt vid

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{Q_0}{2} \left(1 - \frac{\xi}{P_0} \right) \\ q_2^* &= \hat{q}_2(q_1^*) = \frac{Q_0}{4} \left(1 - \frac{\xi}{P_0} \right). \end{aligned}$$

Trots att Företag 2 vet i förhand valet som Företag 1 gör, bör det noteras att Företag 1 ändå kommer gå med mer vinst i slutändan då $q_1^* > q_2^*$. Detta eftersom företaget som väljer kvantitet först, som marknadsledare, kan påverka marknaden genom att ta hänsyn till hur följaren kommer att reagera. Ledaren tar i akt följarens bästa respons och kan därmed säkra en högre vinst till skillnad från Cournotmodellen.

7.4 Applikation av duopolmodellerna

På grund av modellernas strategiska variabel samt timing skiljer de sig i de typer av marknader de är mest applicerbara. Enligt tidigare antar Bertrandmodellen att det företag med lägre produktpris tar hela marknaden, att det är en konstant marginalkostnad och företagen sätter priset

samtidigt. Bertrandmodellen är särskilt lämplig för marknader där företag konkurrerar genom prisjusteringar snarare än genom kapacitetsbeslut, där produkterna är homogena eller nära substitut, och där konsumenter har låg sökkostnad. Dessa förhållanden kan ses inom bensinmacksmarknaden [12], där de empiriskt visar att bensinpriset i bensinmackar följer en cyklisk Bertrandmodell. Detta indikerar att efterfrågan är relativt priselastisk och sökkostnaderna är låga. Det innebär att pris blir den dominerande strategiska variabeln och inte icke-prisrelaterad differentiering såsom varumärke, service eller kvalitet. Liknande strukturer kan även observeras inom onlinehandeln där företag sätter priser strategiskt och konsumenternas val i hög grad påverkas av relativ prisnivå [13].

Det bör dock noteras att ren Bertrand-jämvikt sällan observeras i praktiken då produktdifferentiering, kapacitetsbegränsningar och sökfriktioner ofta leder till positiva prispåslag. Detta positiva prispåslag återfinns även i Cournotmodellen som till skillnad från Bertrandmodellen alltid förutsäger positiva vinster.

Enligt tidigare antar Cournotmodellen att företagen konkurrerar genom att välja producerad kvantitet snarare än pris. Företagen fattar sina produktionsbeslut samtidigt och priset bestäms därefter av den totala producerade mängden via Ekvation 7. Varje företag internaliserar hur den egna kvantiteten påverkar marknadspriset men tar konkurrentens kvantitet som given. Modellen förutsätter konstant marginalkostnad och homogena produkter.

Cournotmodellen är särskilt lämplig för marknader där produktion eller kapacitet beslutas före prisbildningen, där produktionsanpassning är trög eller kostsam eller där marknadspriset bestäms av det totala utbudet. Sådana förhållanden återfinns exempelvis inom cement- och energimarknader, där företag fattar produktionsbeslut i förväg och priset därefter anpassas till den aggregerade kvantiteten [14]. Empiriska studier av elmarknader har visat att kvantitetskonkurrens ofta ger en rimlig approximation av strategiskt beteende, särskilt när kapacitetsbegränsningar är centrala [15].

I dessa marknader blir produktionsbeslut den dominerande strategiska variabeln, medan priset snarare utgör ett resultat av marknadsbalansen än ett direkt strategiskt val. Detta skiljer sig från Bertrandmodellen, där priset sätts direkt av företagen.

Det bör dock noteras att ren Cournot-jämvikt sällan observeras i praktiken. Dynamisk konkurrens, asymmetrisk information, kapacitetsbegränsningar och möjligheten till egen prissättning kan leda till avvikelser från den klassiska modellen. I synnerhet kan sekventiella beslutssituationer snarare motivera användningen av Stackelbergmodellen istället för användningen av en simultan Cournotmodell.

Enligt tidigare antar Stackelbergmodellen att företagen konkurrerar genom kvantitetsval, men till skillnad från Cournotmodellen sker besluten sekventiellt istället för simultant. Ett företag agerar ledare och väljer sin produktionsnivå först, medan det andra företaget observerar detta val och därefter optimerar sin egen kvantitet givet ledarens beslut. Priset bestäms, liksom i Cournotmodellen, av den totala producerade mängden via Ekvation 7. Modellen förutsätter konstant marginalkostnad och homogena produkter.

Stackelbergmodellen är särskilt lämplig för marknader där ett företag har ett tidsmässigt eller strukturellt försprång, exempelvis genom större kapacitet, etablerad marknadsposition eller tidigare inträde. I sådana situationer kan ledaren internalisera följarens reaktionsfunktion och därigenom påverka marknadsutfallet strategiskt. Detta kan observeras på marknader med dominerande aktörer, såsom OPEC-marknaden där ett större företag sätter produktionsnivån och mindre aktörer anpassar sig därefter [9].

I dessa marknader blir timing och beslutsordning avgörande komponenter i konkurrensen. Ledaren kan genom sitt kvantitetsval påverka marknadspriset och därigenom begränsa följarens handlingsutrymme vilket ofta resulterar i en ledarfördel jämfört med simultan Cournotkonkurrens.

Referenser

- [1] John von Neumann, Oskar Morgenstern och Ariel Rubinstein. *Theory of Games and Economic Behavior: 60th Anniversary Commemorative Edition*. Princeton University Press, 1944. ISBN: 9780691119939. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1r2gkx> (hämtad 2026-05-12).
- [2] John Nash. “Non-Cooperative Games”. I: *Annals of Mathematics* 54.2 (1951), s. 286–295.
- [3] Paolo Buccirossi. *Buyers’ decision and price competition*. Working Papers in Public Economics 36. Department of Economics och Law, Sapienza University of Rome, jan. 1999. DOI: None. URL: <https://ideas.repec.org/p/sap/wpaper/wp36.html>.
- [4] Niloofer Fadavi. *Subgame perfect Nash equilibrium for dynamic pricing competition with finite planning horizon*. 2022. arXiv: 2208.02842 [econ.TH]. URL: <https://arxiv.org/abs/2208.02842>.
- [5] Bernard Lebrun. “Continuity of the first price auction Nash equilibrium correspondence”. I: *Economic Theory* 20.3 (2002), s. 435–453. URL: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:spr:joecth:v:20:y:2002:i:3:p:435-453>.
- [6] He Huang, Hongyan Xu och Jian Chen. “A comparison of a simple procurement auction and generalized Nash bargaining”. I: *Journal of Systems Science and Systems Engineering* 18.3 (sept. 2009), s. 341–357. DOI: 10.1007/s11518-009-5112-3. URL: <https://doi.org/10.1007/s11518-009-5112-3>.
- [7] John Maynard Smith och George R. Price. “The Logic of Animal Conflict”. I: *Nature* 246.5427 (2 nov. 1973), s. 15–18. DOI: 10.1038/246015a0. URL: <https://doi.org/10.1038/246015a0>.
- [8] John Maynard Smith. “Evolution and the Theory of Games”. I: *Did Darwin Get It Right? Essays on Games, Sex and Evolution*. Boston, MA: Springer US, 1988, s. 202–215. ISBN: 978-1-4684-7862-4. DOI: 10.1007/978-1-4684-7862-4_22. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-7862-4_22.
- [9] Martina Vanelli, Giacomo Como och Fabio Fagnani. “Nash equilibria of the pay-as-bid auction with K-Lipschitz supply functions”. I: *IFAC-PapersOnLine* 56.2 (2023). 22nd IFAC World Congress, s. 4173–4178. ISSN: 2405-8963. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.1762>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896323021717>.
- [10] Tim Roughgarden och Éva Tardos. “How Bad Is Selfish Routing?” I: *Journal of the ACM* 49.2 (2002), s. 236–259. DOI: 10.1145/506147.506153. URL: <https://doi.org/10.1145/506147.506153>.
- [11] James N. Webb. *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution*. London: Springer, 2007. ISBN: 978-1-84628-423-6.
- [12] Michael D. Noel. “Edgeworth price cycles: Evidence from the Toronto retail gasoline market”. I: *The Journal of Industrial Economics* 55.1 (2007), s. 69–92. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1467-6451.2007.00303.x>.
- [13] Michael R. Baye, John Morgan och Patrick Scholten. “price dispersion in the small and in the large: evidence from an internet price comparison site”. I: *The Journal of Industrial Economics* 52.4 (2004), s. 463–496. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.0022-1821.2004.00236.x>.
- [14] Stephen P. Ryan. “The Costs of Environmental Regulation in a Concentrated Industry”. I: *Econometrica* 80.3 (2012), s. 1019–1061. DOI: <https://doi.org/10.3982/ECTA6750>.
- [15] Severin Borenstein, James Bushnell och Steven Stoft. “The Competitive Effects of Transmission Capacity in a Deregulated Electricity Industry”. I: *The RAND Journal of Economics* 31.2 (2000), s. 294–325. ISSN: 07416261. URL: <http://www.jstor.org/stable/2601042> (hämtad 2026-03-03).

8 AI användning

I denna uppsats har AI-verktyg använts för textredigering, korrekturläsning och källsökning samt för att sätta referensen i rätt form för loggning i källhänvisningen i slutet av rapporten. Allt i syftet att underlätta textbearbetning. AI-verktyg har även använts för Latex-formatering av tabeller, grafer och övrig Latex-formatering. AI-verktyg har inte använts i textgenererande syfte.

A Appendix

B Brouwers fixpunktssats för specialfallet $n = 1$

Sats B.1. Låt $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ vara konvex, kompakt och icke-tom. Om $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ är kontinuerlig så existerar det en fixpunkt.

Bevis. När $n = 1$ innebär det att den enda kompakta och konvexa setet, Σ , är det stängda intervallet $[a, b]$.

Låt $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$, om $T(a) = a$ och $T(b) = b$ så är vi klara. Om istället $T(a) > a$ och $T(b) < b$. Låt $g(x) = T(x) - x$ mäta skillnaden mellan $T(x)$ och x , då är $g(a) > 0$, $g(b) < 0$. I och med att $T(x)$ är kontinuerlig är även $g(x)$ kontinuerlig. Mellanvärdessatsen säger då att det måste existera en $x^* \in (a, b)$ så att $g(x^*) = 0$ vilket medför att x^* är en fixpunkt. $\square$

C Kartesisk produkt av konvexa mängder är konvex

Sats C.1. Om $A \subseteq \mathbb{R}^m$ och $B \subseteq \mathbb{R}^n$ är konvexa mängder är $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ också en konvex mängd.

Bevis. Låt $p_1 = (a_1, b_1)$ och $p_2 = (a_2, b_2)$ tillhöra $A \times B$. Konvexkombinationen för $\lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 = (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2, \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2)$$

Då A är konvex tillhör $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$ A och då B är konvex tillhör $\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2$ B . Alltså tillhör konvexkombinationen $A \times B$ vilket visar att $A \times B$ är konvex. $\square$

D Förtydligande av bevis av Nash

D.1 Varför gäller beviset endast för en begränsad mängd strategier?

Beviset av Nashjämvikt konstruerar T så att T byggs upp av ändliga summor $\sum_{\alpha} \varphi_i^{\alpha}(\sigma) s_i^{\alpha}$ och $\sum_{\alpha} \varphi_i^{\alpha}(\sigma)$ och Nash ger inget argument för att dessa konvergerar i det oändliga fallet. Vidare förutsätter även Brouwers fixpunktssats att rummet bland annat är ändlig dimensionellt vilket gör att beviset med hjälp av Brouwers fixpunktssats inte gäller.

D.2 Varför är Σ kompakt och konvex?

Brouwers fixpunktssats kräver att T är en kontinuerlig avbildning på en kompakt och konvex mängd, Σ . I vårt fall är Σ en kartesisk produkt av ändligt många simplex Δ_{m_i} , och vi visar att Σ är kompakt och konvex. Varje simplex Δ_{m_i} är definierat av linjära bivillkor och är därmed ett snitt av slutna halvrum och ett slutet hyperplan, vilket gör Δ_{m_i} slutet. Δ_{m_i} är också begränsat eftersom det är konvexhöljet av ett ändligt antal punkter. En ändlig kartesisk produkt av slutna och begränsade mängder är själv slutet och begränsad, så $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ är slutet och begränsad. Kompaktheten följer då direkt av att en delmängd av $\mathbb{R}^n$ är kompakt om den är slutet och begränsad. Konvexiteten följer sedan av att den kartesiska produkten av konvexa mängder är konvex (se sats C.1).